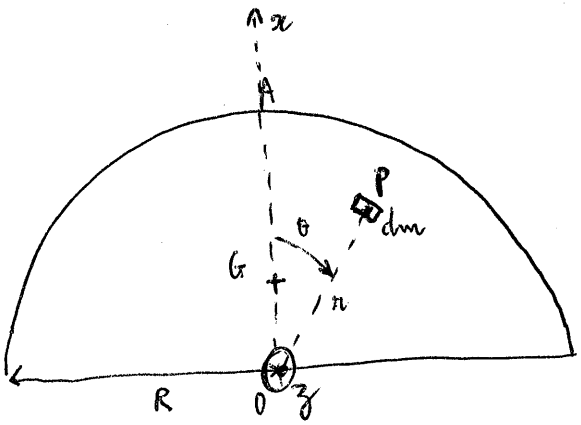
L2 - Mécanique du solide. Examen du 5 novembre 2012

Ex. 1 (6 pts)



disque homogène de masse m et d'épaisseur négligeable

⇒ densité surfacique de masse σ constante

$$\sigma = \frac{m}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2m}{\pi R^2}$$

(2) a) $\overline{J}(O_z)$ moment d'inertie du demi-disque par rapport à (Oz) :

$$\overline{J}(O_z) = \iint_{\frac{1}{2}\text{ disque}} OP^2 \, dm = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \, \sigma \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \sigma \frac{R^4}{4} \pi = \frac{2m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \pi = \frac{mR^2}{2}$$

(2) b) G centre de gravité du demi-disque

par symétrie, $G \in [OA]$

$$m \overrightarrow{OG} = \iint_{\frac{1}{2}\text{ disque}} dm \, \overrightarrow{OP}$$

en projetant sur l'axe (Ox) :

$$m \, OG = \iint dm \, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{u_x} = \iint dm \, r\cos(\theta) = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sigma \, r \, dr \, d\theta \, r\cos(\theta)$$

$$= \sigma \frac{R^3}{3} \times 2 = \frac{4R}{3\pi} m$$

$$\Rightarrow OG = \frac{4R}{3\pi} < R \quad \text{normal}$$

Exercice 2

a) Si on note I_1, J_1 les points appartenant à la planche et I_2, J_2 les points appartenant aux cylindres, on a :

$$\vec{v}_{g_I} = \vec{v}_{I_1} - \vec{v}_{I_2} = \dot{x}\,\vec{u}_x - r\omega\,\vec{u}_x = (\dot{x} - r\omega)\,\vec{u}_x$$

$$\vec{v}_{g_J} = \vec{v}_{J_1} - \vec{v}_{J_2} = \dot{x}\,\vec{u}_x - (-r\omega\,\vec{u}_x) = (\dot{x} + r\omega)\,\vec{u}_x .$$

b) La barre subit les forces $\vec{R}_I$ et $\vec{R}_J$ ainsi que son poids $\vec{P}$.

$\dot{x} < r\omega \Rightarrow v_{g_I} = \dot{x} - r\omega < 0 \Rightarrow T_I = +\mu N_I$. (1)

$\dot{x} > -r\omega \Rightarrow v_{g_J} = \dot{x} + r\omega > 0 \Rightarrow T_J = -\mu N_J$. (2)

c) Le Th. de la résultante cinétique s'écrit :

$$m\vec{a}_G = \vec{R}_I + \vec{R}_J + \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = T_I + T_J + 0 & (3) \\ 0 = N_I + N_J - mg . & (4) \end{cases}$$

Le Th du moment cinétique s'écrit en G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_{\vec{R}_I/G} + \vec{\Gamma}_{\vec{R}_J/G} + \vec{\Gamma}_{\vec{P}/G}$$

$\vec{L}_G = \vec{L}_G^{\,*} = \vec{0}$ car la barre est fixée dans le réf. barycentrique.

$$\vec{\Gamma}_{\vec{R}_I/G} = \vec{GI} \wedge \vec{R}_I = (\ell + x) \times N_I\ \vec{u}_z .$$

$$\vec{\Gamma}_{\vec{R}_J/G} = \vec{GJ} \wedge \vec{R}_J = -(\ell - x) \times N_J\ \vec{u}_z$$

d'où l'équation : $0 = (\ell + x) N_I - (\ell - x) N_J$. (5).

On a au total 5 équations à 5 inconnues.

(4) et (5) $\Rightarrow$ $N_I = \frac{mg}{2\ell}(\ell - x)$ et $N_J = \frac{mg}{2\ell}(\ell + x)$.

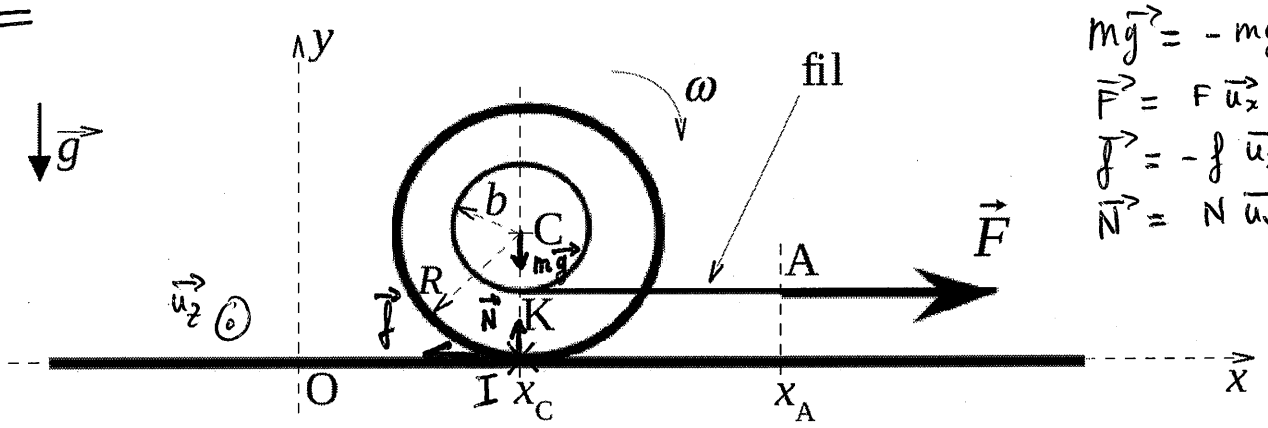
(3) et (1),(2) $\Rightarrow$ $m\ddot{x} = \mu\frac{mg}{2\ell}(\ell - x) - \frac{\mu mg}{2\ell}(\ell + x)$.

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\mu g}{\ell} x = 0 .$$

d) la pulsation des oscillations est donc $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}}$

et la période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$.

Ex 3 — Mouvement horizontal d'un Yoyo



Forces sur {Yoyo + fil} :
$\vec{mg} = -mg\,\vec{u_y}$
$\vec{F} = F\,\vec{u_x}$
$\vec{f} = -f\,\vec{u_x}$ (frottement)
$\vec{N} = N\,\vec{u_y}$

a) $\vec{v}(C) = v(C)\,\vec{u_x}$. Vecteur rotation $\vec{\Omega} = -\omega\,\vec{u_z}$

Vaut aussi $\dfrac{d(\vec{IC})}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{IC} \iff \vec{v}(C) - \vec{v}(I) = -\omega R\,\vec{u_z} \wedge \vec{u_y} = \omega R\,\vec{u_x}$

pas de glissement en I donc $\vec{v}(I) = \vec{0}$ donc $\underline{\vec{v}(C) = \omega R\,\vec{u_x} = \dot{x}_c\,\vec{u_x}}$

b) Système : {Yoyo + fil} dans le réf du sol (R) galiléen :

PFD : $\vec{N} + \vec{f} + \vec{mg} + \vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}(C)}{dt} = m\,\ddot{x}_C\,\vec{u_x}$

projection verticale $\Rightarrow N = mg$ et projection sur $\vec{u_x}$: $F - f = m\,\ddot{x}_c = mR\dot{\omega}$ (*)

Th du moment cinétique barycentrique (dans R^*) : $\dfrac{dL^*_{(Cz)}}{dt} = \left(\underbrace{\vec{CC}\wedge\vec{mg}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{CI}\wedge\vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{CI}\wedge\vec{f} + \vec{CH}\wedge\vec{F}\right)\cdot\vec{u_z}$

or $L^*_{(Cz)} = -J\omega$ car $\vec{\Omega} = -\omega\,\vec{u_z}$

ainsi $-J\dot{\omega} = \left(fR\,(-\vec{u_y}) \wedge (-\vec{u_x}) + bF\,\vec{u_z}\right)\cdot\vec{u_z} = (-fR + bF)\,\vec{u_z}\cdot\vec{u_z}$

soit $J\dot{\omega} = Rf - bF$

d'après (*) $J\dot{\omega} = R(F - mR\dot{\omega}) - bF$ soit $\underline{\dot{\omega} = \dfrac{F(R-b)}{J+mR^2} > 0}$

Rmq : on constate que le yoyo va vers la droite (sur la figure) : $\dot{\omega} > 0 \Rightarrow \dot{x}_c > 0$

Rmq : d'après (*) et la valeur de $\dot{\omega}$: $f = F - mR\dot{\omega} = F\dfrac{J+mRb}{J+mR^2} < F$ car $b < R$

La force de frottement a une intensité plus faible que $\vec{F}$; mais le moment de $\vec{f}$ par rapport à C est plus grand que le moment de $\vec{F}$ par rapport à C donc c'est $\vec{f}$ qui fait tourner le yoyo vers la droite (direction de $\vec{F}$).

car $\|\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f})\| = fR = FR\dfrac{J+mRb}{J+mR^2} = F\dfrac{JR+mRb^2}{J+mR^2} > F\dfrac{Jb+mR^2b}{J+mR^2} = Fb$

et $\|\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F})\| = Fb$

c) $\ddot{x}_c = R\dot{\omega} = \dfrac{FR(R-b)}{J+mR^2} \Rightarrow \dot{x}_c = \dfrac{FR(R-b)}{J+mR^2}t$ car $\dot{x}_c(t=0)=0$

$\Rightarrow x_c(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{FR(R-b)}{J+mR^2}t^2$ car $x_c(t=0)=0$

d) Varignon $\dfrac{d\vec{IK}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{IK} \iff \vec{v}(K) - \vec{v}(I) = -\omega(R-b)\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y$

$\vec{0}$ (pas de glissement)

donc $\vec{v}(K) = \omega(R-b)\vec{u}_x = \vec{v}(H)$ car le fil est inextensible

$x_H = \omega(R-b)t + l$ car à $t=0$ $x_H = l$

e) Energie cinétique du yoyo dans (R) : Th de Koenig

$E_c = \dfrac{1}{2}m\,v(C)^2 + E_c^*$ avec $E_c^* = \dfrac{1}{2}J\omega^2$

↑ car C est le centre de masse du yoyo

$E_c = \dfrac{F^2(R-b)^2}{2(J+mR^2)}t^2$

f) Th de la puissance cinétique pour solide indéformable :

$\dfrac{dE_c}{dt} = \sum$ Puissance des forces extérieures

$= \vec{F}\cdot\vec{v}(H) + \underbrace{\vec{f}\cdot\vec{v}(I)}_{=0 \text{ car } \vec{v}(I)=0} + \underbrace{m\vec{g}\cdot\vec{v}(C)}_{=0 \text{ car } \perp} + \underbrace{\vec{N}\cdot\vec{v}(I)}_{=0}$

$= \dfrac{F^2(R-b)^2}{J+mb^2}$ ↙

or d'après e) $\dfrac{dE_c}{dt} = \dfrac{F^2(R-b)^2}{J+mR^2}t$

le Th de la puissance cinétique est bien vérifié.

frottement statique.

Rmq : pour que le yoyo ne glisse pas il faut que $f \leq \mu N = \mu_s mg$.

↑ (statique)

cela donne une condition sur la valeur de F

$F \leq F_{max} = \mu_s mg \dfrac{J+mR^2}{J+mRb}$